Ainsi $f'(x) = 2e^{-2x} - 2e^{-x} - 1 = 2(e^{-x} - \underbrace{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}_{<0})(e^{-x} - \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

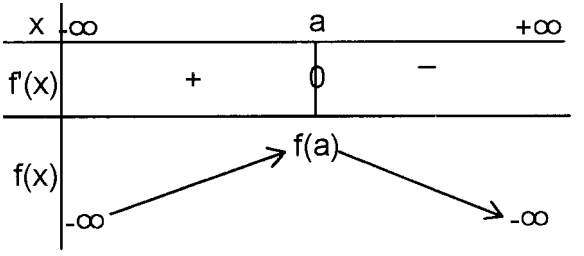
D'où $\text{sig}(f'(x)) = \text{sig}(e^{-x} - \frac{1+\sqrt{3}}{2})$

• $e^{-x} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \le 0 \Leftrightarrow e^{-x} \le \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -x \le \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x \ge -\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)$.

Par suite $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \le \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)$. Nommons $a = \ln\left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)$

D'où le tableau de variation de f



• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} [2e^{-x} - e^{-2x} - x]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left[e^{-x}(2 - e^{-x} - \underbrace{xe^{x}}) \right] = -\infty.$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} [2e^{-x} - e^{-2x} - x] = -\infty.$

2) f est continue et strictement décroissante sur [Log2 ;1]

$\Rightarrow$ f réalise une bijection de [Log2; 1] sur f([Log2; 1])

de plus $f([\text{Log}2; 1]) = \left[2e^{-1} - e^{-2} - 1; \frac{3}{4} - \ln 2\right]$ contient 0

D'où l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution α dans [Log2; 1]

3) • $f(x) = -x + (2e^{-x} - e^{-2x}); \forall x \in \text{IR}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [2e^{-x} - e^{-2x}] = 0$

D'où la droite D: $y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2e^{-x} - e^{-2x} - x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left[\frac{e^{-x}}{-x}(-2 + e^{-x}) - 1\right]$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \left[\frac{e^{X}}{X}(-2 + e^{X}) - 1\right] = -\infty$

$\Rightarrow$ (C) possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.